

**Zebranie KB PAN
Kraków, 16.11.2015**

**Wymiarowanie konstrukcji z profili
giętych na zimno.
Wybrane zagadnienia:
teoria, badania, praktyka**

**Leopold Sokół
Dr inż., Prof. CHEM Paris
SOKOL Consultants**

**PODSTAWOWE POJECIE
TEORII PRZEKROJÓW CIENKOŚCIENNYCH:
SZEROKOŚĆ EFEKTYWNA ŚCISKANEJ ŚCIANKI PŁASKIEJ**

TEORIA

Równanie powierzchni wybożenia cienkościennej płyty prostokątnej

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

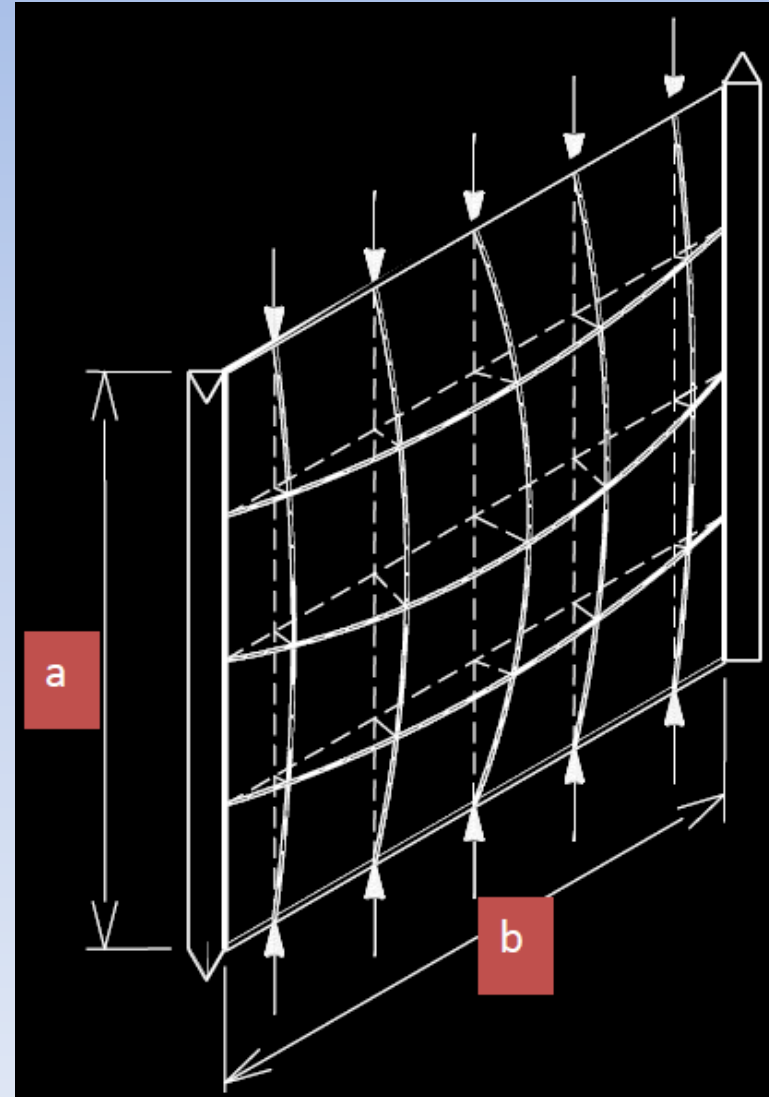
$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Dla płyty z podparciem swobodnym na brzegach "a" z siłą N_x przyłożoną na brzegu "b", powierzchnia odkształcenia może być przedstawiona w postaci podwójnego szeregu:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \right)$$

dla którego minimum energii potencjalnej otrzymuje się dla:

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$



Najmniejsza wartość tego wyrażenia jest otrzymana gdy $n=1$ (\Rightarrow jedna pół-fala w kierunku poprzecznym) i gdy $a = m \cdot b$ (\Rightarrow całkowita ilość półfal o długości b w kierunku a).

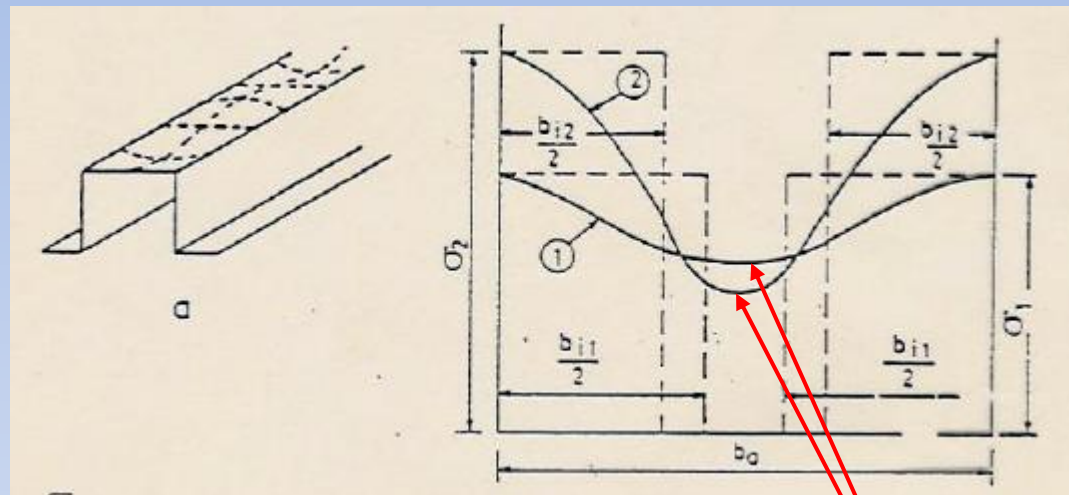
Warunek ten jest spełniony oczywiście dla płyty nieskończenie długiej, który dotyczy ścianek profili giętych.

W tych warunkach wzór dla naprężenia krytycznego przyjmuje postać:

$$\sigma_{cr} = \frac{(N_x)_{cr}}{t} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} * \frac{kt^2}{b^2} \quad (a)$$

gdzie k jest współczynnikiem zależącym od warunków podparcia na brzegach a . Na przykład, dla podparcia swobodnego $k=4$.

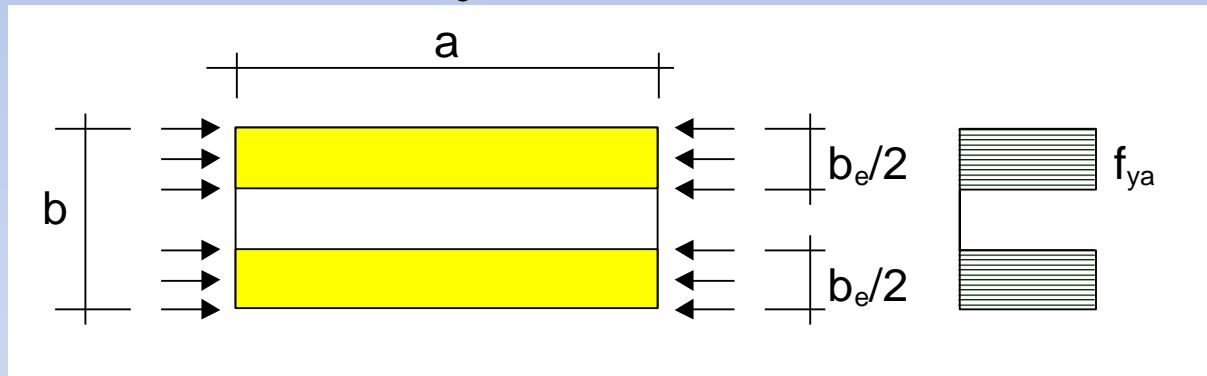
W rzeczywistości naprężenie ściskające nie jest równomiernie rozłożone:



Można tutaj zauważyć, że im bardziej wzrasta ściskanie tym bardziej zmniejsza się naprężenie wewnątrz ścianki.

Równanie w postaci (a) ma małą przydatność praktyczną, von Kàrmàn zaproponował więc następującą interpretację tego równania (1932) :

Rzeczywisty nierównomierny rozkład naprężeń na szerokości "b" zastąpiony jest stałym naprężeniem f_y , działającym na zredukowanej szerokości $b_e/2$ na obu skrajach ścianki:



Stan równowagi (a) można więc zapisać w postaci:

$$f_y = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} * \frac{kt^2}{b_e^2} \quad (b)$$

Dzieląc stronami (a) i (b), otrzymujemy po przekształceniach wzór von **Kàrmàna** na **szerokość efektywna** (zwaną również szerokością współpracującą):

$$b_e = b \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} = Ct \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

gdzie:

$$C = \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 1.90$$

W praktycznych zastosowaniach szerokość efektywna jest najczęściej przedstawiana w postaci ilorazu $\rho = b_e/b$. Wzór von Kàrmàna przyjmuje wtedy postać:

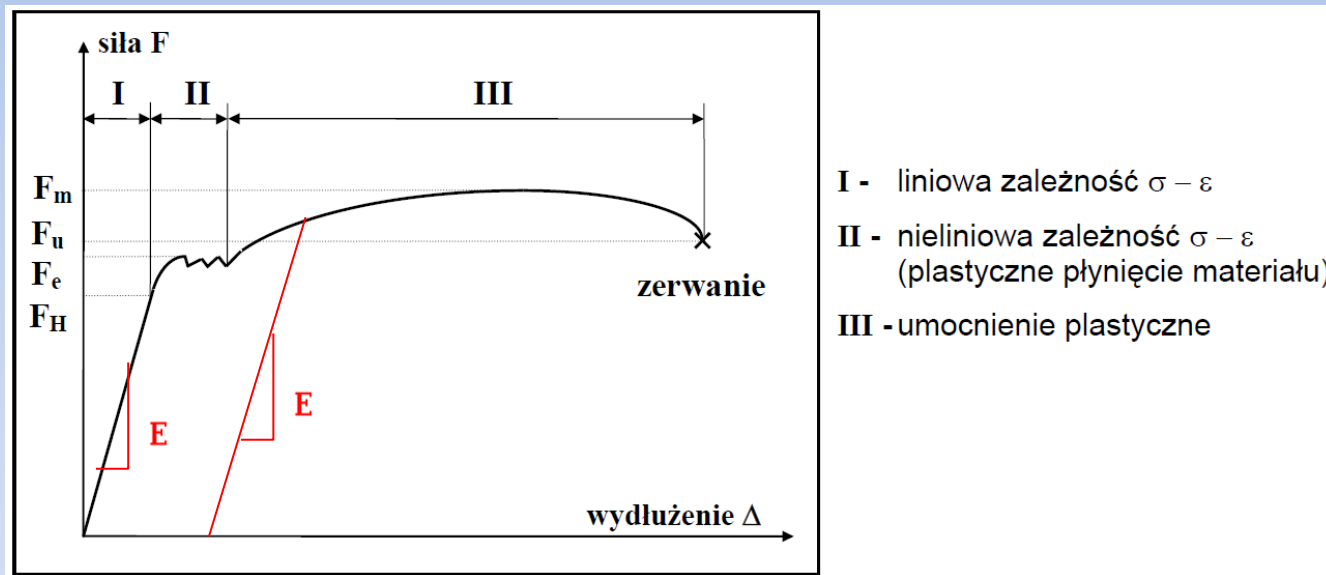
$$\rho = \frac{b_e}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}}$$

Na tej postaci wzoru na szerokość efektywną kończy się ujęcie czysto teoretyczne, które dla praktycznych zastosowań wymaga korekty empirycznej.

PRAKTYKA

Główne powody dla których doświadczalna korekta wzoru teoretycznego von Kàrmàna jest niezbędna:

1. Umocnienie plastyczne i przewężenie na zagięciach:



2. Imperfekcje geometryczne: płaskie ścianki nie są doskonale płaskie (sfalowania)

3. Naprężenia wewnętrzne po procesie gięcia

Różne postacie wzorów na szerokość efektywną:

Winter:

$$\rho = \frac{b_e}{b} = 2 \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} \right)$$

Kod kanadyjski:

$$b_e = 0.95 t \sqrt{\frac{kE}{f_y}} \left(1 - 0.208 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{kE}{f_y}} \right)$$

ENV EC3-1-3:

$$\rho = \frac{b_e}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} \left(1 - 0.22 \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} \right)$$

EN 1993-1-3:

dla $\sigma_{com,Ed} = f_y / \gamma_M$:

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,055 (3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1,0$$

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{\bar{b}/t}{28,4 \varepsilon \sqrt{k_\sigma}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y [\text{N/mm}^2]}}$$

dla $\sigma_{com,Ed} < f_y / \gamma_M$:

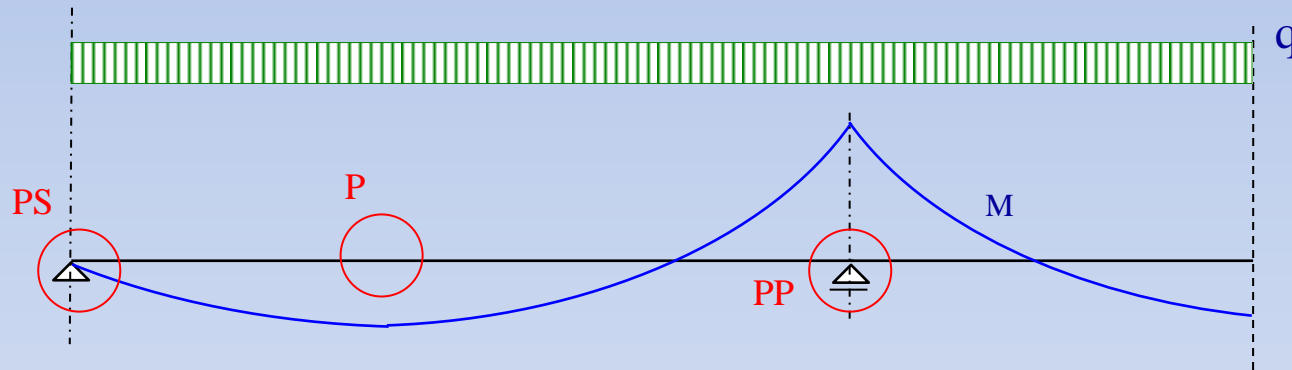
$$\rho = \frac{1 - 0,055(3 + \psi) / \bar{\lambda}_{p,red}}{\bar{\lambda}_{p,red}} + 0,18 \frac{(\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{p,red})}{(\bar{\lambda}_p - 0,6)}$$

$$\bar{\lambda}_{p,red} = \bar{\lambda}_p \sqrt{\frac{\sigma_{com,Ed}}{f_y / \gamma_{M0}}}$$

WYTRZYMAŁOŚĆ BLACH FAŁDOWYCH W UKŁADZIE CIĄGŁYM

Zasady obliczeń teoretycznych

- Układ pracuje w zakresie **sprężystym**
- **Stan Graniczny Użytkowości** (pod obciążeniem charakterystycznym) jest określony dopuszczalnym ugięciem
- **Stan Graniczny Nośności** (**pod obciążeniem obliczeniowym**) jest określony osiągnięciem wytrzymałości w jakimkolwiek przekroju



Kryteria wytrzymałości:

- "**PS**" Podpora Skrajna: zmiażdżenie środków
- "**P**" Przęsło: moment zginający
- "**PP**" Podpora Pośrednia: moment, reakcja, interakcja

Kryterium odkształcenia:

- Strzałki ugięcia w połowie przęseł

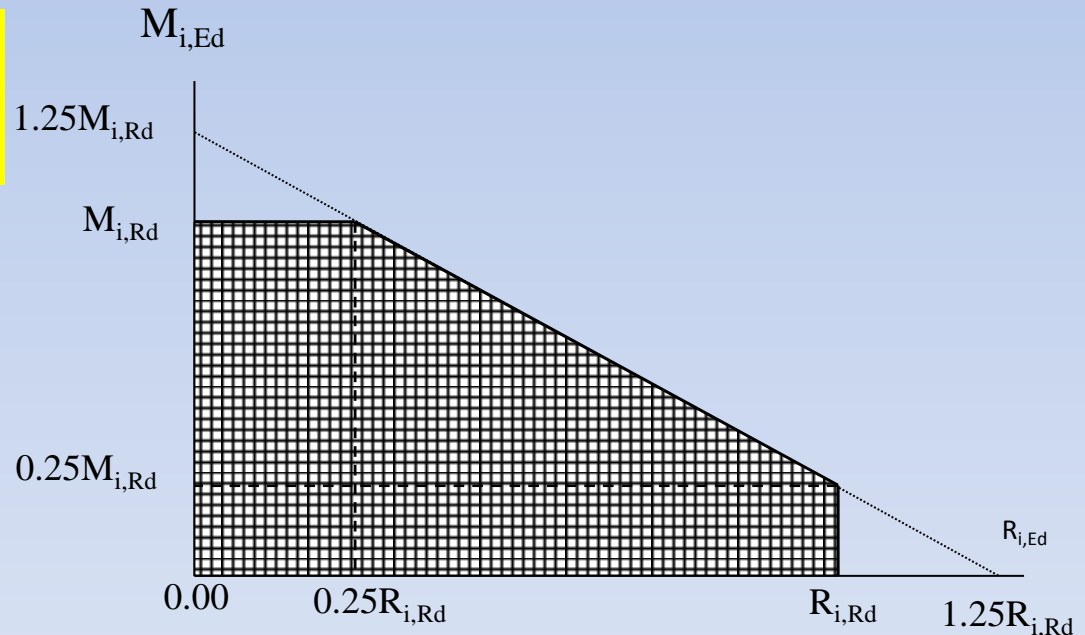
Szczególną uwagę należy zwrócić na wytrzymałość przekroju nad podpora pośrednia, z jednoczesnym działaniem momentu i reakcji.
Chodzi tu ogólnie o wytrzymałość przekroju na który działa jednocześnie moment i poprzeczna skupiona siła liniowa.

Wytrzymałość ta określona jest równaniami:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd}} + \frac{F_{Ed}}{R_{w,Rd}} \leq 1,25$$

$$M_{Ed} / M_{c,Rd} \leq 1$$

$$F_{Ed} / R_{w,Rd} \leq 1$$



W układach wieloprzęsłowych: interakcja moment-reakcja jest najczęstszym kryterium wymiarującym.

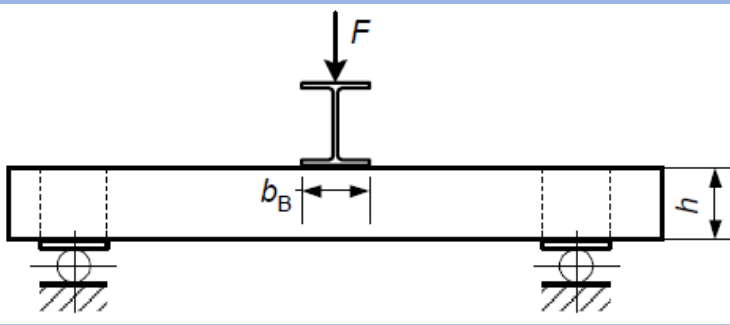
Zasady obliczeń opartych na badaniach:

- **Stan Graniczny Użytkowości** (pod obciążeniem charakterystycznym) jest określony:
 - . dopuszczalną strzałką ugięcia,
 - . osiągnięciem 90% wytrzymałości na podporze pośredniej **PP**

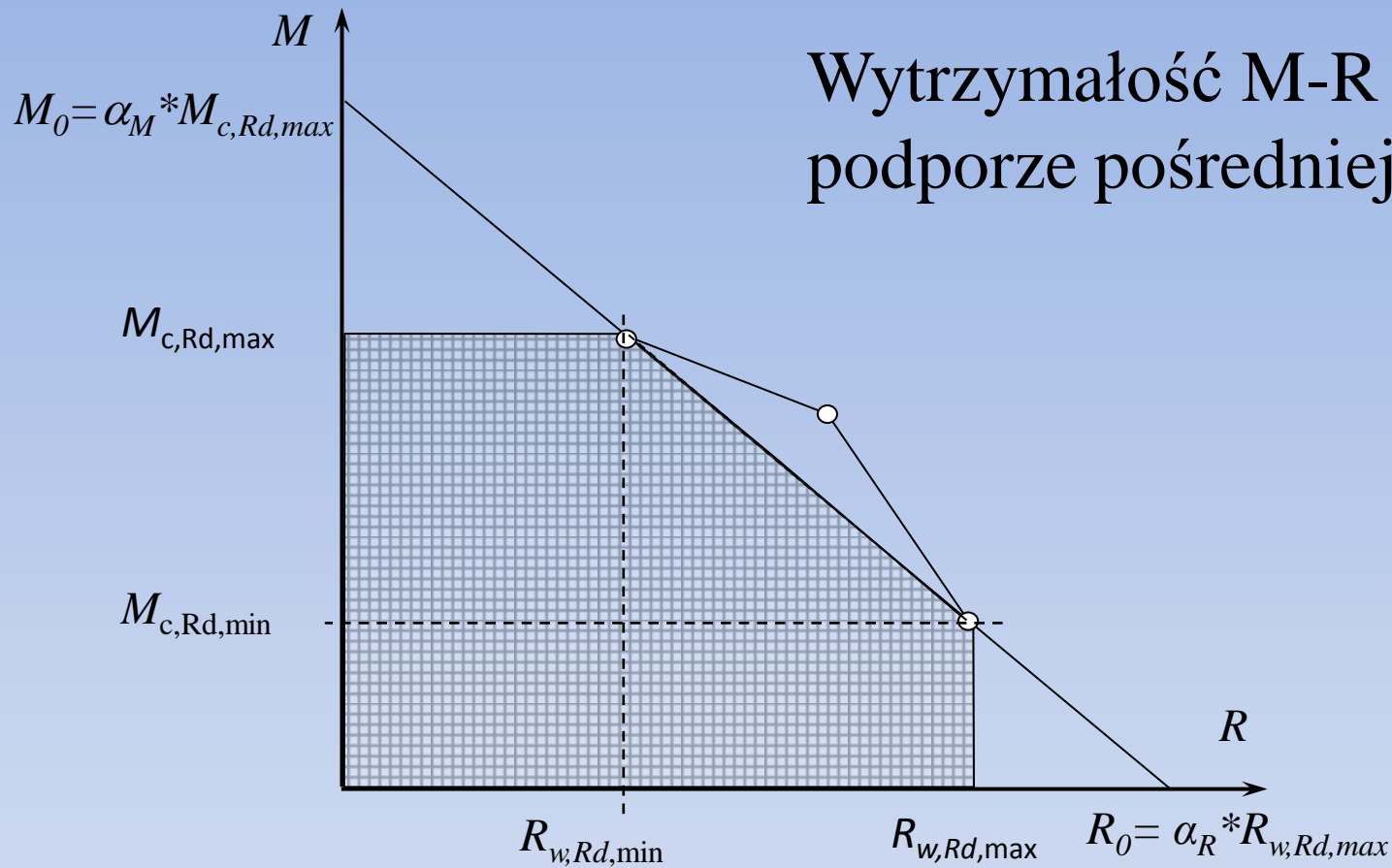
Wytrzymałość "**PP**" jest określona doświadczalnie

Układ pracuje w zakresie **sprężystym**

Badanie wytrzymałości i zależności $M-\theta$ na podporze pośredniej



Wytrzymałość M-R na podporze pośredniej



$$\frac{M_E}{M_{c,R,max}} \leq 1$$

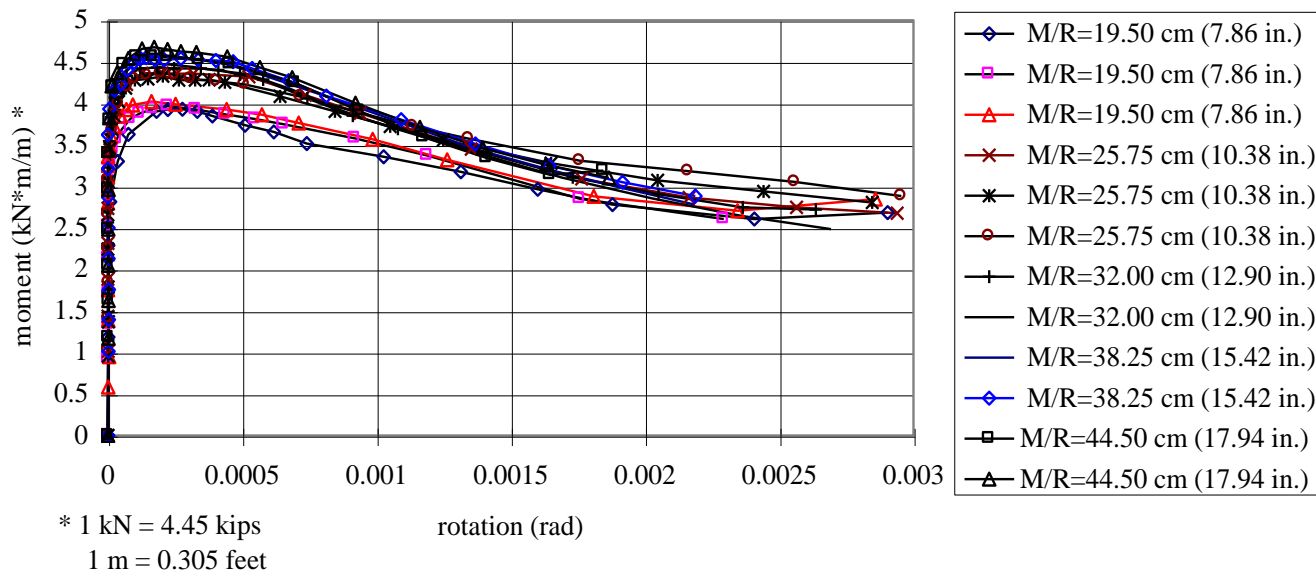
$$\frac{F_E}{R_{w,R,max}} \leq 1$$

$$\frac{M_E}{M_0} + \frac{F_E}{R_0} \leq 1$$

- Stan Graniczny Nośności (pod obciążeniem obliczeniowym)

określony jest:

- wytrzymałością na podporze skrajnej "PS",
- wytrzymałością na moment zginający w przęśle "P",
- obrotem θ na podporze pośredniej



Zależność "M- θ " oraz wytrzymałości "PS" i "P" są określone doświadczalnie

zespolonego o dużej rozpiętości (6 m)



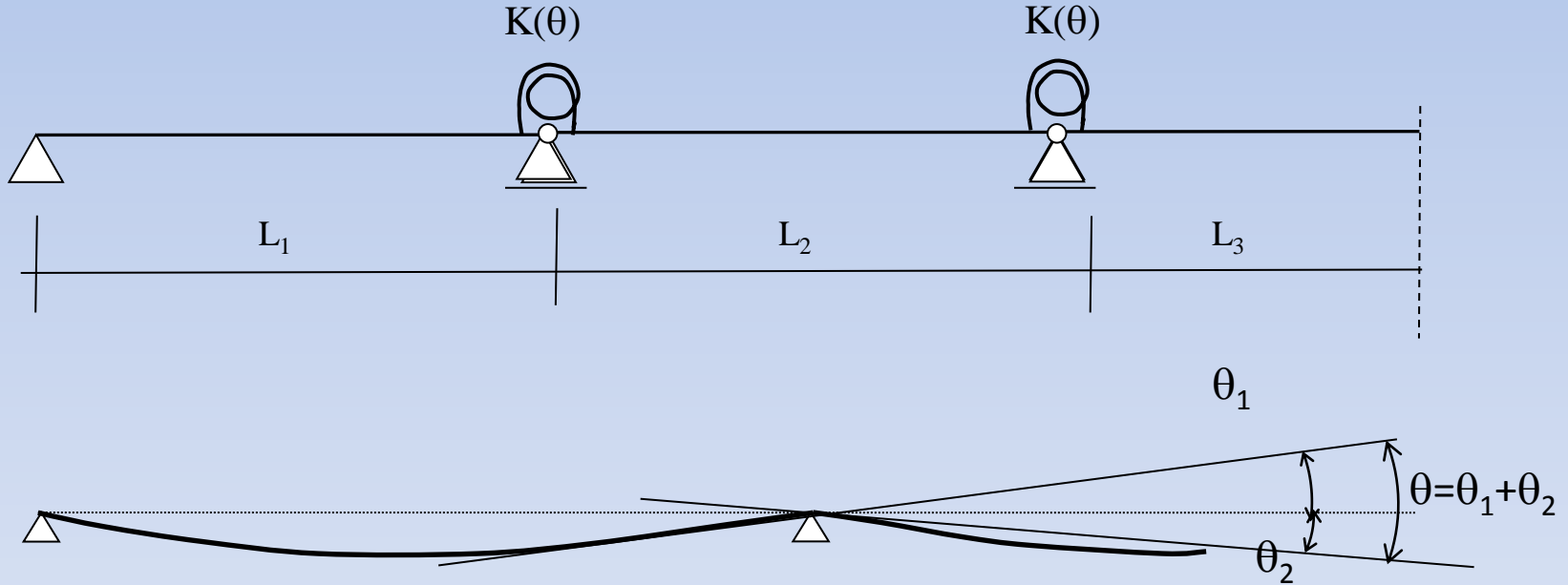
Widok stanowiska
badawczego w
początkowej fazie
obciążenia

Fala wyboczenia górnej półki
w końcowej fazie obciążenia



Układ ciągły po uplastycznieniu przekroju na jednej lub wielu podporach ma zachowanie nieliniowe, z przegubami plastycznymi o zmiennej sztywności na podporach w zależności od obrotu θ

$$K(\theta) = \frac{M}{\theta}$$



PRZYPADEK SZCZEGÓLNY:

Belki z ciągłym bocznym podparciem górnej półki

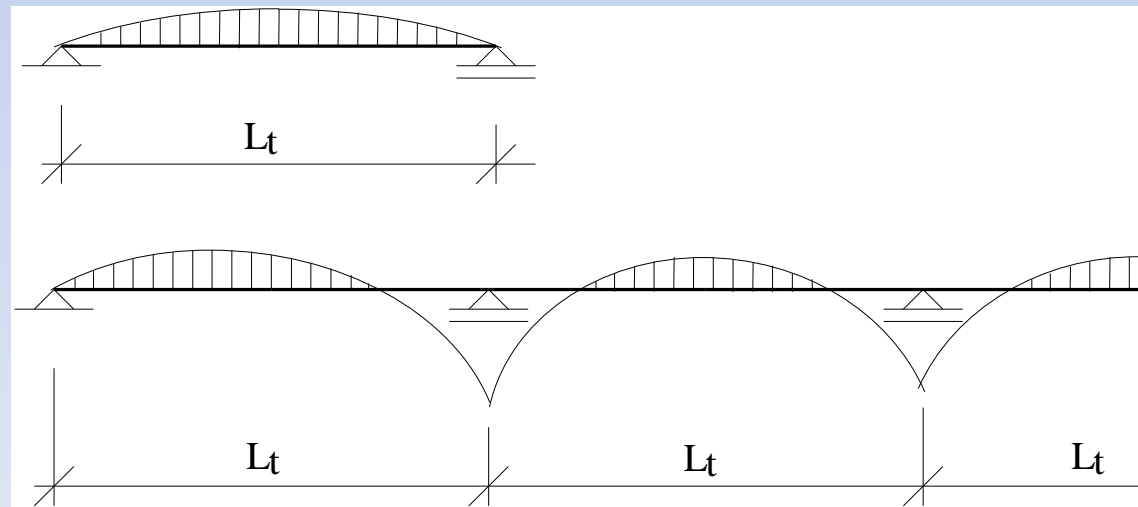
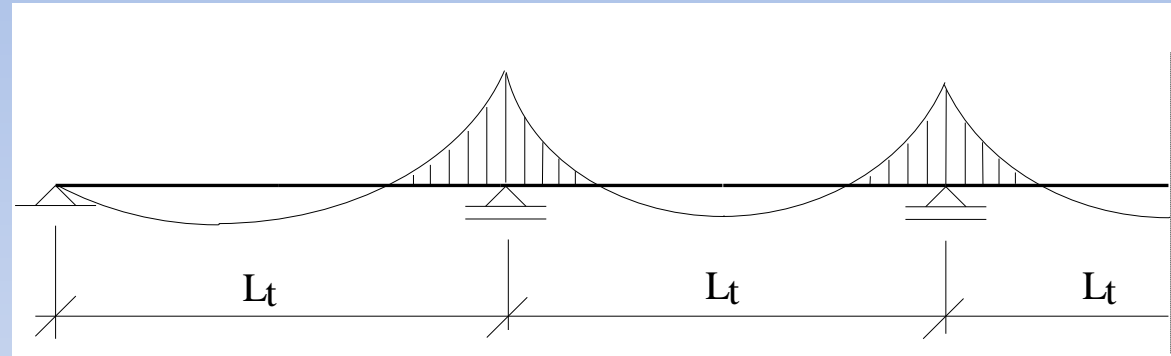
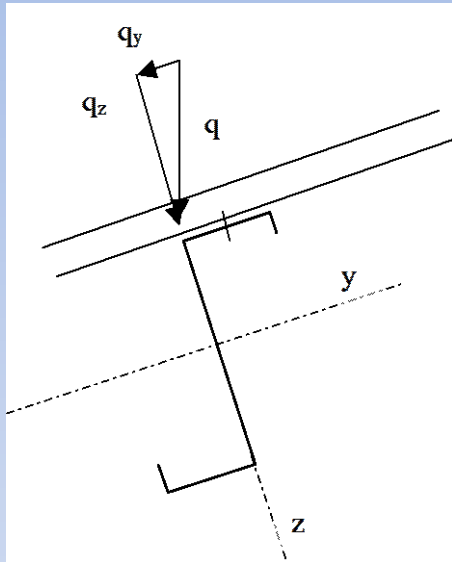
Chodzi tu ogólnie o płatwie lub rygle ściennie o przekrojach Z, C lub Σ , z jedną półką podpartą przez połąć dachową lub obudowę ścienną z blachy fałdowej.

Przyjmując, że dzięki pracy przeponowej blachy górna półka przejmuje tylko składową obciążenia prostopadłą do dachu, płatew jest zginana wokół osi y równoległej do dachu, niezależnie od położenia osi głównych. Dodatkowo występuje wyboczenie oraz boczne zginanie pasa dolnego, które również należy uwzględnić w obliczeniach.

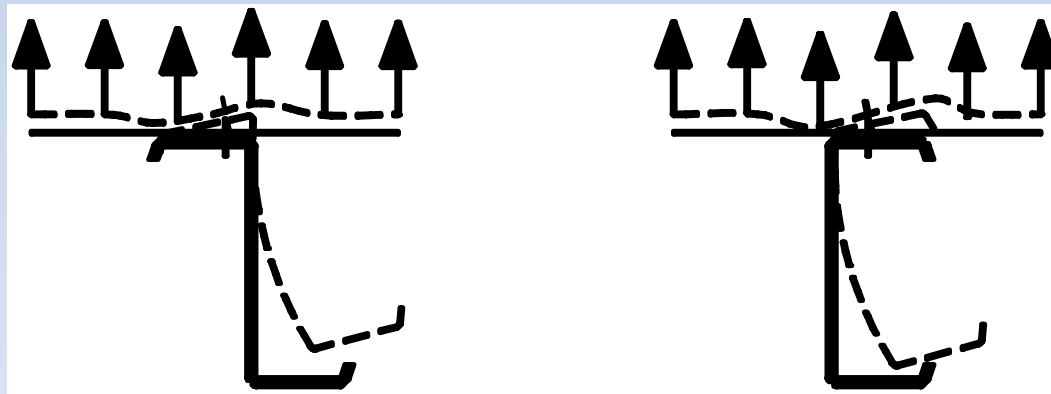
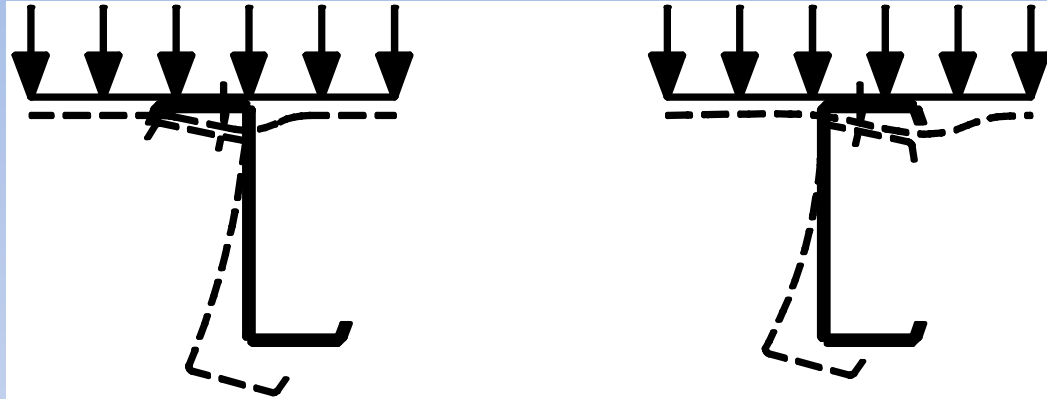
Na tych założeniach oparty jest zaproponowany w końcu lat 70. i przyjęty w Eurokodzie 3-1-3 model obliczeniowy ([1]) który będzie przedstawiony w skrócie.

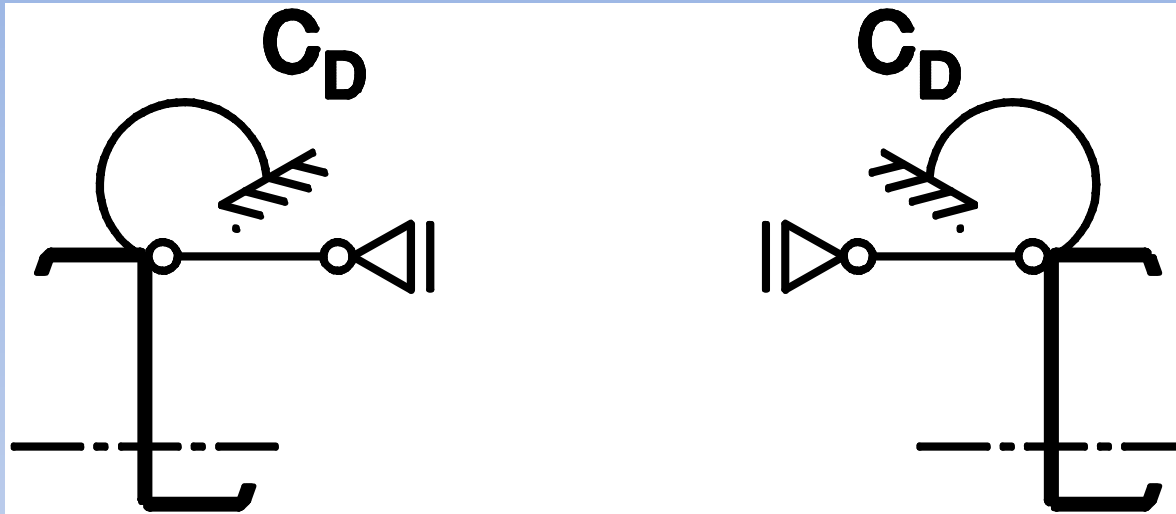
Na końcu prezentacji podane są publikacje źródłowe, które będą pomocne dla pełniejszego zapoznania się z tym tematem.

Stateczność pasa dolnego należy sprawdzić w strefach momentu ujemnego (\Rightarrow ściskanie pasa dolnego)

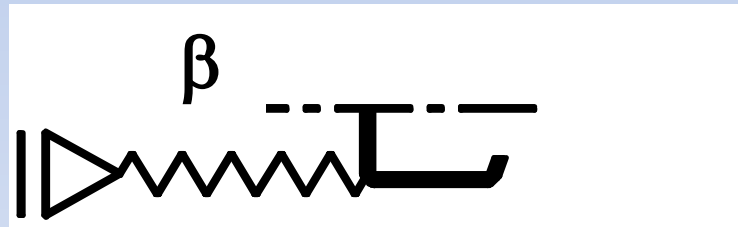


Przyjęty model pracy przekroju:



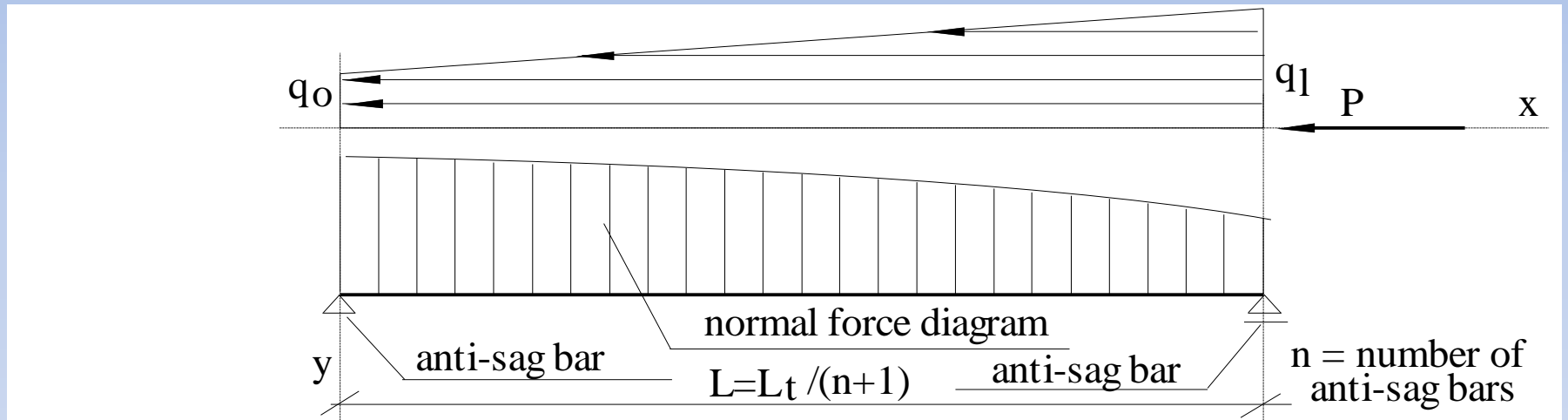


\Rightarrow



Problem do rozwiązania: obliczenie długości wyboczeniowej pasa dolnego traktowanego jak ściskana belka na podłożu sprężystym

Schemat statyczny układu dla którego obliczana jest siła krytyczna



Odształcenie

Obc. poprzeczne

Obc. normalne

Podłoże sprężyste

$$E_i = \frac{EI_f}{2} \int_0^L (y'')^2 dx$$

$$E_q = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_x^L q_x dx \right) (y')^2 dx$$

$$E_P = \frac{1}{2} \delta_P P \int_0^L (y')^2 dx$$

$$E_e = \frac{\beta}{2} \int_0^L y^2 dx$$

Energia całkowita układu:

$$E_t = E_i + E_e + E_q + E_p =$$

$$\int_0^L \left\{ \frac{EI_f (y'')^2}{2} + \frac{\beta y^2}{2} + \frac{\delta_1 q_1}{2} \left[(\eta - 1) \frac{x^2}{2L} - \eta x + \frac{L}{2} (1 + \eta) \right] (y')^2 + \frac{1}{2} \delta_P P (y')^2 \right\} dx$$

Równanie to przedstawia funkcjonal typu: $J[y] = \int F(x, y, y'') dx$ który osiąga minimum gdy jego pierwsza wariacja jest = 0, co jest wyrażone równaniem Eulera-Poissona:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

$$F_{y''} = \frac{\partial F}{\partial y''}$$

skąd otrzymujemy równanie

$$\alpha \left(\frac{d^4 y}{d\xi^4} + \pi^4 K y \right) - \pi^2 \delta_1 \left[(\eta - 1) \xi^2 - 2\eta \xi + \eta + \delta_P \delta_1 \psi + 1 \right] \frac{d^2 y}{d\xi^2} - 2\pi^2 \delta_1 \left[(\eta - 1) \xi - \eta \right] \frac{dy}{d\xi} = 0$$

w którym parametr α określa siłę krytyczną

Dla znalezienia wartości tego parametru założono rozwiązanie w postaci szeregu:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i \sin \pi i \xi$$

Poszukując minimum błędu przy pomocy metody Galerkinia otrzymano układ równan liniowych, którego najmniejsza wartość własna określa siłę krytyczną:

$$\alpha_{cr} = \frac{N_e}{N_{cr}}$$

która z kolei określa długość wyboczeniową $L_f / L = \sqrt{\alpha_{cr}}$

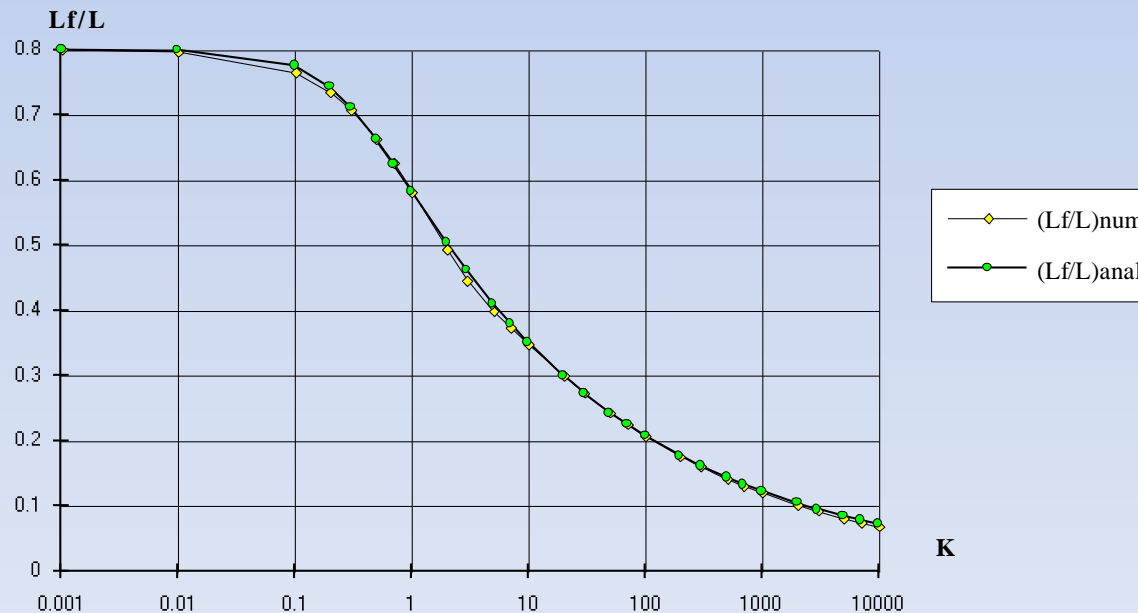
Drogą poszukiwań znaleziono, że funkcja określająca długość wyboczenia w zależności od sztywności podłoża sprężystego β przedstawionej parametrem

$$K = \frac{\beta L^4}{\pi^4 EI_f}$$

może być przedstawiona z bardzo dobrą dokładnością w postaci funkcji

$$F(K) = \eta_1 (1 + \eta_2 \cdot K^{\eta_3})^{\eta_4}$$

posiadającej następujący kształt



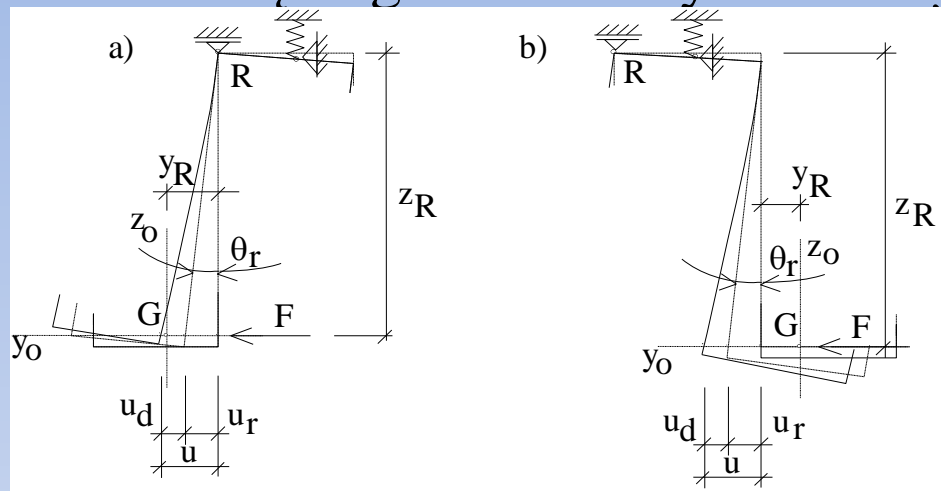
Na tej bazie, metodą najmniejszych kwadratów, przy pomocy specjalnego programu komputerowego otrzymano szereg rozwiązań które posłużyły do opracowania tabel wartości współczynników η dla różnych praktycznych przypadków ([5,6]):

Load	Simple span					Multi-span																			
	Up-lift					End span										Intermediate span									
	Up-lift					Up-lift					Down					Up-lift					Down				
Anti-sag bars	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
Curve	1	2	5	5	5	7	2	2	5	5	4	7	6	1	1	3	7	2	2	2	8	6	6	1	1

Enveloping curve	1	2	3	4
1	0,6938	5,4463	1,2733	-0,1680
2	0,8000	6,7481	1,4843	-0,1545
3	0,3059	0,2323	0,7424	-0,2790
4	0,4139	1,7218	1,1073	-0,1782
5	0,9021	8,5456	2,1783	-0,1108
6	0,5956	2,3250	1,1484	-0,1920
7	0,5144	1,2545	0,8679	-0,2415
8	0,6574	8,1695	2,2210	-0,1071

Powyższe dane zostały wykorzystane w Tab. 10 Eurokodu 3-1-3

W celu uzyskania większej dokładności obliczeń, w publikacjach [7,8] zaproponowano wzięcie pod uwagę dodatkowego czynnika związanego z energią odkształcenia skrętnego wobec wymuszonej osi obrotu R:



Składa się on z dwóch członów: jeden związany z naprężeniami normalnymi spowodowanymi skręcaniem nieswobodnym i drugi z naprężeniami ścinającymi spowodowanymi skręcaniem swobodnym

$$E_{ir} = \frac{EI_{\omega R} R_r^2}{2z_R^2} \int_0^L \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{GI_s R_r^2}{2z_R^2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

Uwzględnienie tego czynnika w obliczeniach numerycznych zostało przyjęte w klauzuli 10.1.2(5) Eurokodu 3-1-3.

Dla uzupełnienia wracamy jeszcze do wspomnianego na początku bocznego zginania wolnej półki.

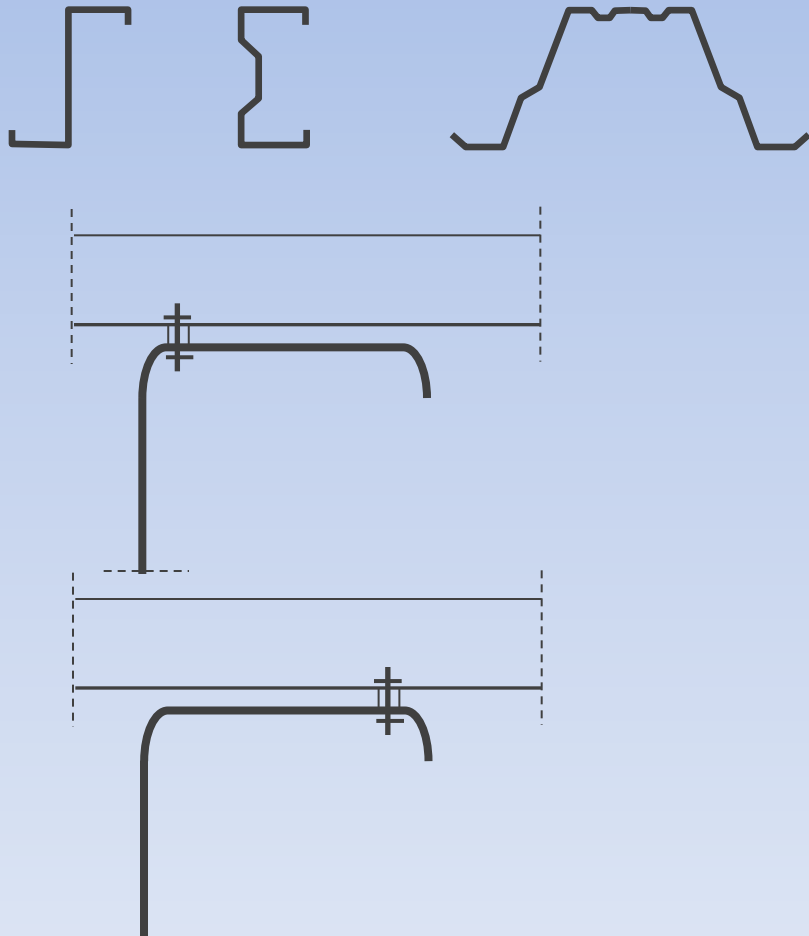
Dla swobodnie zginanych belek:

- gdy środek ścinania nie pokrywa się z punktem przyłożenia obciążenia, zachodzi skręcanie przekroju
- gdy kierunek obciążenia nie pokrywa się z główną osią bezwładności, zachodzi ukośne zginanie przekroju.

Jeśli jedna z półek zginanego przekroju jest podparta i środek obrotu jest wymuszony warunkami zewnętrznymi, to następuje zwichrzenie przekroju na skutek bocznego ugięcia wolnej półki, wynikającego z niezrównoważonego przepływu naprężeń ścinających na styku między wolną półką i środkiem.

Zjawisko to jest uwidocznione na następujących zdjęciach z badań:

Badane przekroje

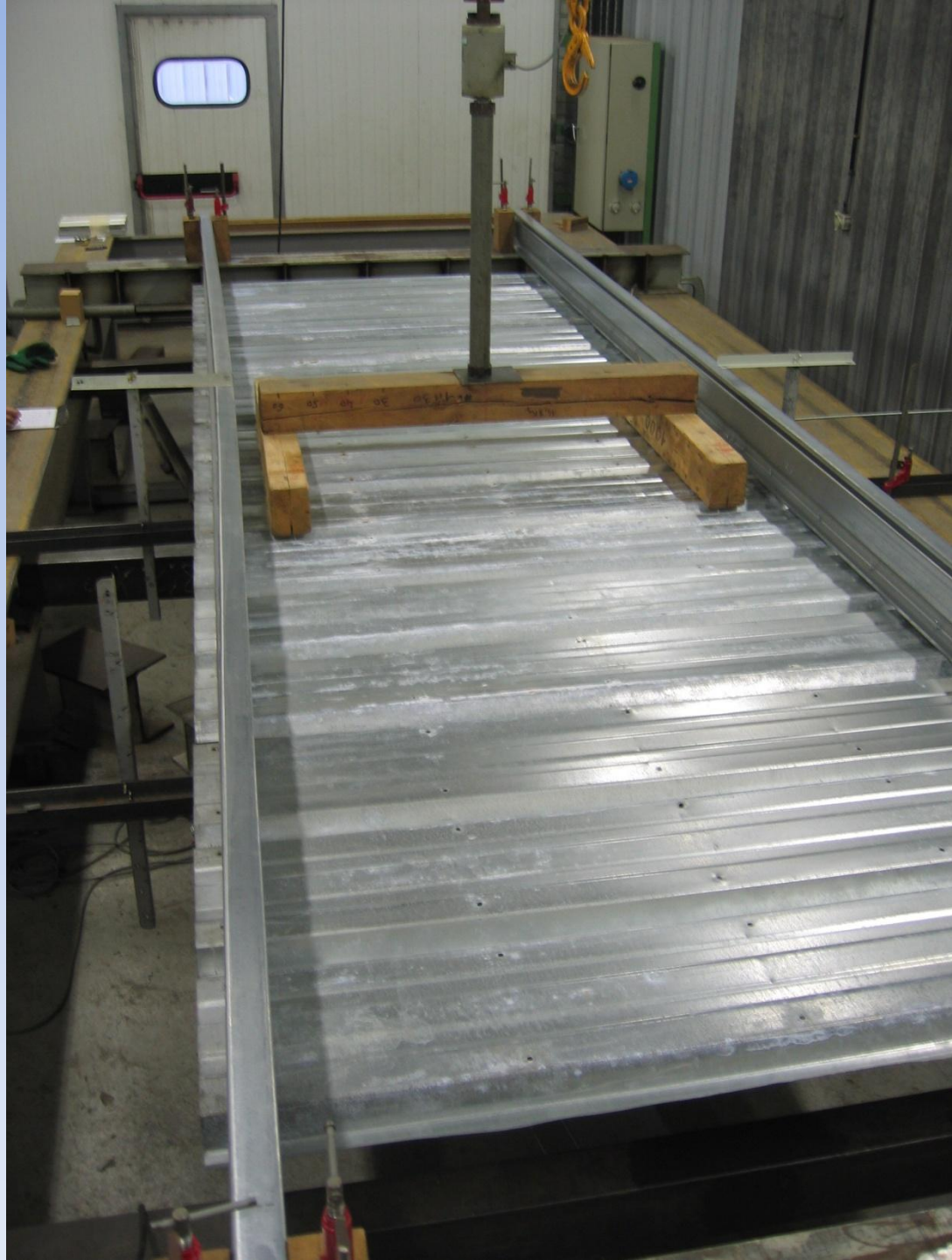


Badanie przekroju Z

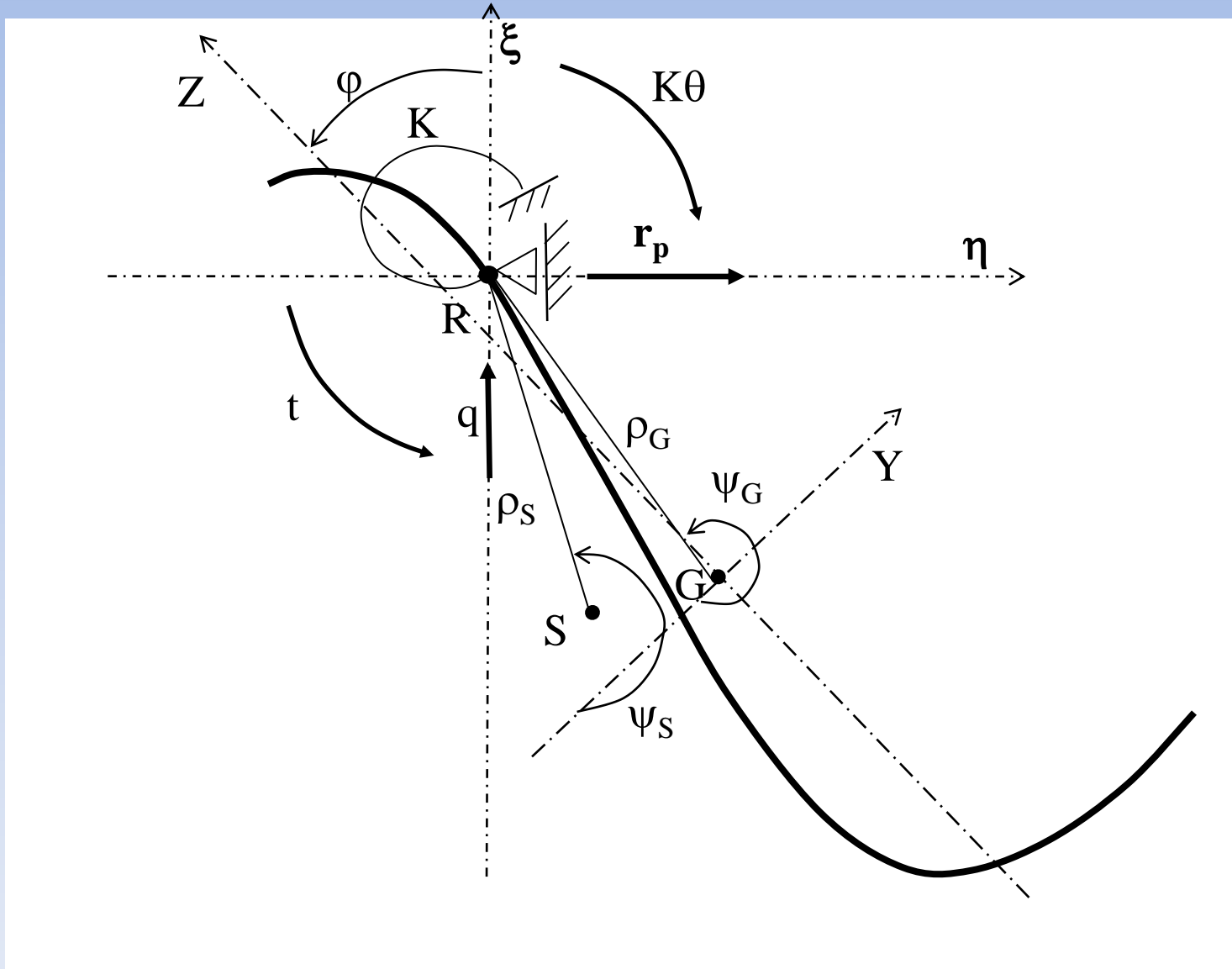
Badanie przekroju Ω



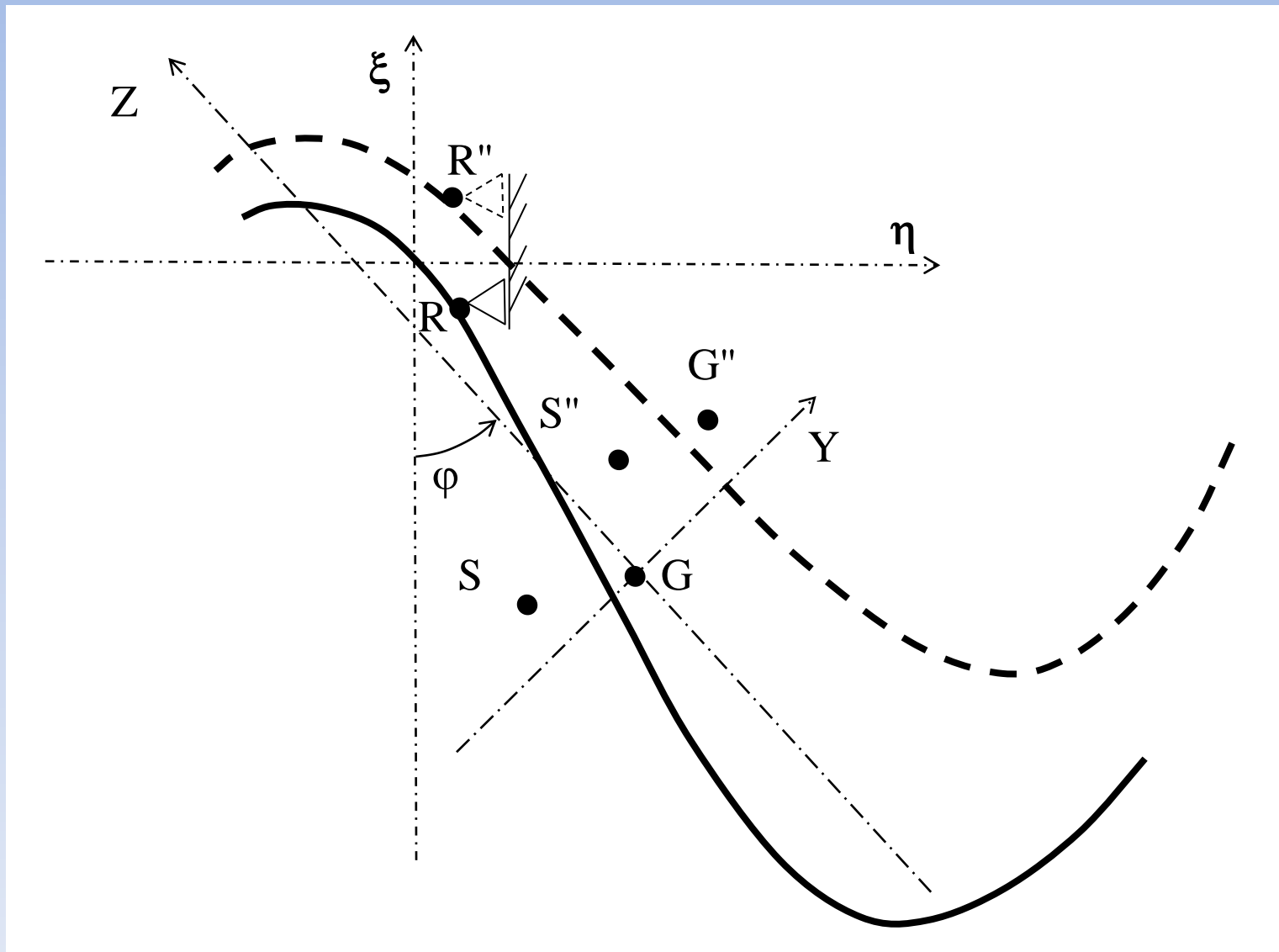
Badanie przekroju Σ



Ujęcie teoretyczne: uogólniony schemat analizowanego przekroju ([9])



Zależności geometryczne związane z uogólnionym przemieszczeniem przekroju



Równania równowagi

$$EI_z y_S^{IV} - r_p \cos \varphi - q \sin \varphi = 0$$

$$EI_y z_S^{IV} + r_p \sin \varphi - q \cos \varphi = 0$$

$$EI_\omega \theta^{IV} - GI_d \theta'' + q_z \rho_{Sy} + q_y \rho_{Sz} - r_{pz} \rho_{Sy} + r_{py} \rho_{Sz} + K\theta - t = 0$$

→ Równanie różniczkowe niejednorodne:

$$\theta^{IV} - 2\alpha^2\theta'' + \beta^4\theta = \frac{m}{EI_{\omega R}}$$

$$\alpha^2 = \frac{GI_d}{2EI_{\omega R}}$$

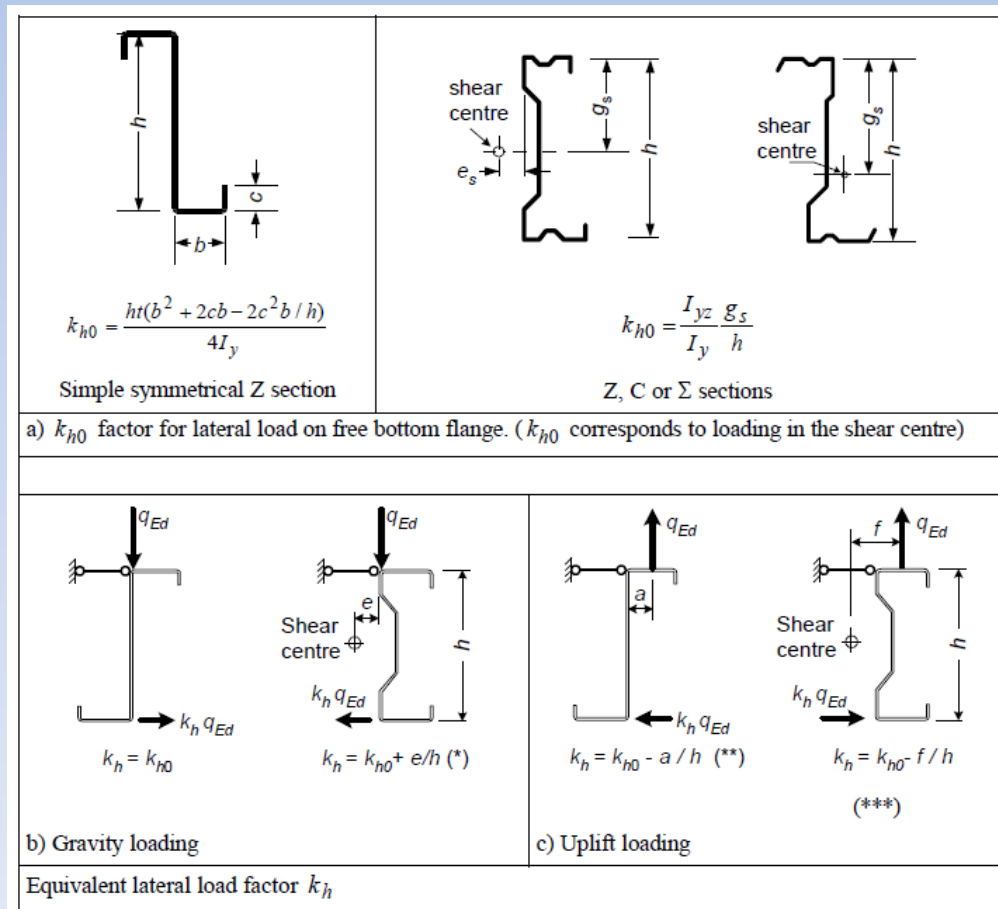
$$I_{\omega R} = I_{\omega} + \rho_S^2 \frac{I_y I_z \sin^2(\psi_S + \varphi)}{I_y \cos^2 \varphi + I_z \sin^2 \varphi}$$

$$\beta^4 = \frac{K}{EI_{\omega R}}$$

$$m = -q\rho_S \frac{I_y \cos \varphi \cos \psi_S - I_z \sin \varphi \sin \psi_S}{I_y \cos^2 \varphi + I_z \sin^2 \varphi} + t$$

Postać rozwiązania tego równania ([9]) okazuje się jednak zbyt skomplikowana dla zastosowania normatywnego.

Toteż, ponieważ jego wpływ choć niepomijalny jest stosunkowo niewielki, więc w EN 1993-1-3 jest on uwzględniony z uproszczeniem w postaci fikcyjnego obciążenia bocznego q_h ([3]) zależącego od odległości między środkiem ścinania i punktem przyłożenia siły oraz od kąta obrotu osi głównych.



Powyżej opisana metoda obliczeń płatwi została od początku lat 90 powszechnie zastosowana jako "méthode Sokol" i następnie wprowadzona do Eurokodu 3-1-3

Należy tutaj zwrócić uwagę na to, że wartości tabelaryczne współczynników η zostały określone dla stałych przęseł i dla obciążenia równomiernie rozłożonego ([5,6]).

Jeśli zachodzi jeden z poniższych przypadków:

- nierówne przęsła,
- obciążenie poprzeczne nierówno rozłożone
- obciążenie poprzeczne skupione
- obecność obciążenia normalnego
- ciągłość na podporach uzyskana przy pomocy nakładek lub zakładów

wartości tabelaryczne współczynników η nie są dokładne i układ należy obliczyć przy zastosowaniu przyjętego modelu, ale na podstawie rzeczywistego rozkładu momentów.

Aby uwzględnić obroty przekrojów na podporach z ciągłością uzyskana przy pomocy nakładek lub zakładów, należy wykonać badania typu "M- θ " (moment-obrót).

Badanie wytrzymałości i zależności $M-\theta$ na podporze



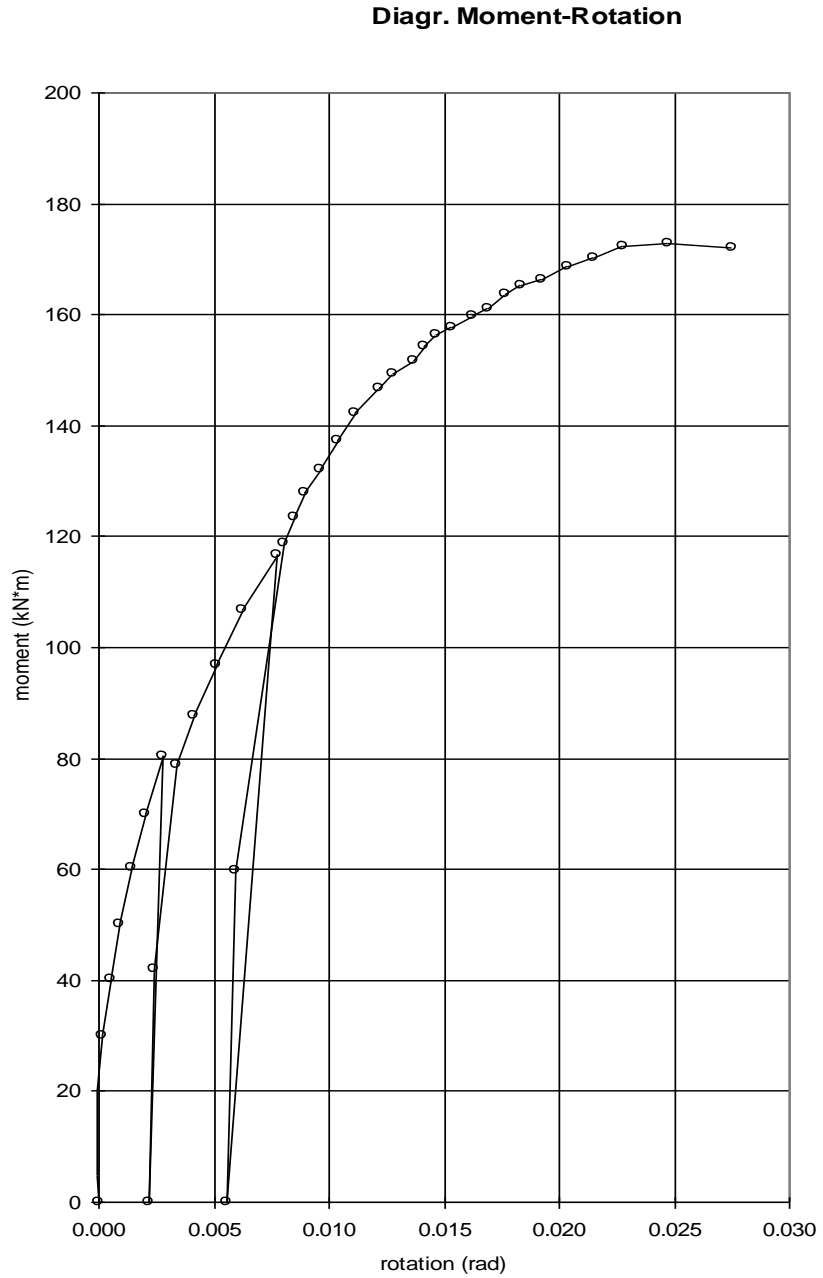
Faza zaawansowana obciążenia



Styki profili sąsiednich przęseł po obrocie na podporze



Wykres M- θ

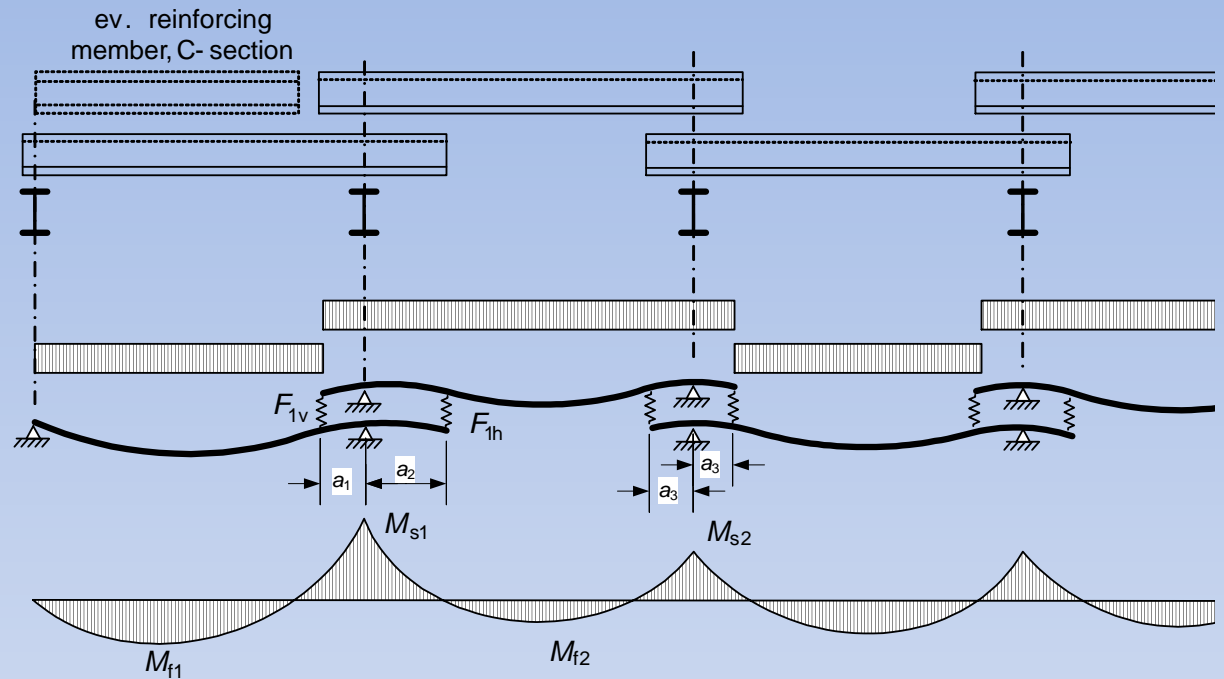


Badanie sztywności utwierdzenia w blasze



Modelowanie układu dla obliczeń numerycznych

Uciąglenie przy pomocy zakładów



Uciąglenie przy pomocy nakładek



Publikacje źródłowe dla metody obliczeń płatwi przyjętej w EC3-1-3

- [1] Sokol L. - *Calcul des pannes en section Z*. Construction Métallique N° 1-1979.
- [2] Sokol L. - *Calcul de la longueur de flambement de la semelle comprimée des pannes en Z*. Construction Métallique N° 2-1980.
- [3] Sokol L. - *Flexion latérale de la semelle libre inférieure des pannes Z et C*. Construction Métallique N° 1-1988.
- [4] Sokol L., *Specific Aspects of Design of Purlins in Z-sections*. Der Metallbau im Konstruktiven-Ingenieurbau. Karlsruhe, Februar 1988
- [5] Sokol L. - *Stabilité des pannes formées à froid, maintenues par bac acier*. Construction Métallique N° 2-1995.
- [6] Sokol L. - *Lateral Stabilization by Steel Sheeting of Structural Members Thin Walled Structures*, Vol 25, No 3, pp.207-217, 1996
- [7] Sokol L. - *Flambement des barres par torsion autour d'un axe de rotation imposé*. Construction Métallique N° 1-2000.
- [8] Sokol L. - *Lateral Buckling of Prismatic Members About an Imposed Axis of Rotation*. Fifteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures. St. Louis, Missouri U.S.A, October 19-20, 2000
- [9] Sokol L. - *Combined Bending and Torsion of Laterally Restrained Thin Walled Steel Beams*, 4th European Conference on Steel and Composite Structures June 8-10, 2005 – Maastricht - Eurosteel 2005

Dziękuję za uwagę